

تحلیل و بهینه سازی پارامتری راهروندهی دوپای غیرفعال

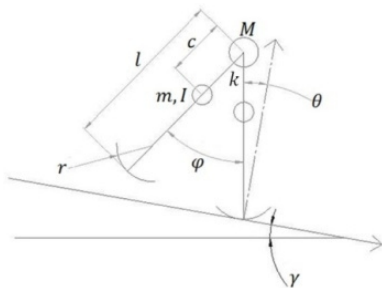
سید محمد هادی ساداتی^{۱*}، مهیار نراقی^۲، عبدالرضا اوحدی همدانی^۳

^۱ دانشجوی مقطع کارشناسی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران؛ m_hadi_sadati@yahoo.com

^۲ استادیار دانشکدهی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران؛ naraghi@aut.ac.ir

^۳ دانشیار دانشکدهی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران؛ a_r_ohadi@aut.ac.ir

شده است. شکل (۱) نمای این مدل را نشان می دهد که پارامترهای آن عبارتند از: m جرم پاها، M جرم متمرکز در مرکز ران، I اینرسی دورانی پاها حول مرکز جرم، l طول پاها، c فاصله‌ی مرکز جرم پاها از مرکز ران، γ شیب سطح، θ زاویه بین پای ثابت و خط عمود بر سطح، φ زاویه‌ی بین دوپا و k سختی فنر مفصل ران.



شکل ۱: نمای ربات دوپای مورد بررسی

مدل سازی شامل سه مرحله‌ی: حرکت از لحظه‌ی بلند شدن پا تا لحظه‌ی برخورد، سپس تعیین لحظه (شرط) برخورد و مرحله‌ی آخر قوانین انتقال متغیرها در فضای فاز در لحظه‌ی برخورد می‌باشد. استخراج روابط به روش ترکیبی TMT که بر گرفته از بخشی از فعالیت‌های لاگرانژ بر روی مختصات عمومی، کار مجازی و اثر نیروهای اینرسی است انجام شده است. از ویژگی‌های این روش، سادگی، وضوح مراحل و بهینه بودن برای حل عددی است. از آنجا که با یک حرکت سیکلی روبرو هستیم، می‌توان معادلات بدست آمده برای هر قدم را برای کل حرکت راهرونده در نظر گرفت. مختصه‌های عمومی عبارتند از:

$$q = [\theta \ \varphi]^T \quad (1)$$

بردار انتقال مختصه‌های مرکز جرم‌ها:

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{st} \\ y_{st} \\ \phi_{st} \\ x_h \\ y_h \\ \phi_{sw} \\ x_{sw} \\ y_{sw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\theta - (l-c)\sin\theta \\ r + (l-c)\cos\theta \\ \theta \\ -r\theta - l\sin\theta \\ r + l\cos\theta \\ \theta - \varphi \\ -r\theta - l\sin\theta - c\sin(\varphi - \theta) \\ r + l\cos\theta - c\cos(\varphi - \theta) \end{bmatrix} = T_q \quad (2)$$

ماتریس انتقال سرعت‌ها:

$$T_{q,q} = \frac{\partial x_i}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r - l\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r - l\cos\theta + c\cos(\varphi - \theta) & -c\cos(\varphi - \theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l\sin\theta - c\sin(\varphi - \theta) & c\sin(\varphi - \theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

چکیده

با ارائه‌ی اولین مدل راهروندهی غیرفعال در سال ۱۹۹۰ توسط مک‌گیر^۱ در پیچه‌ی جدیدی برای بررسی فرآیند قدم‌زنی در انسان و همچنین طراحی روبات‌های پر بازده گشوده شد و پس از این روند با ارائه مدل‌های مختلفی مانند مدل‌های سه بعدی [۸]، مدل‌های دارای بالاتنه [۹، ۱۱] و مدل دارای زانو [۱۰] توسط سایر محققین ادامه یافت. توجه به جزئیاتی نظیر تاثیر پارامترها بر حرکت، مقدار بهینه‌ی یک پارامتر، شبیه سازی و مقایسه‌ی نتایج می‌تواند زمینه‌ی مناسبی را برای فهم بهتر فرآیند قدم زنی طبیعی فراهم آورد.

در کار حاضر با گسترش ساده‌ترین مدل راهرونده [۱]، مدلی نزدیک‌تر به مدل قابل ساخت در نظر گرفته شده است، سپس روابط حاکم بر حرکت از روش ترکیبی TMT استخراج شده است.

پارامترهای مدل با مبنا قرار دادن ساده‌ترین مدل راهرونده، تغییر داده شده و اثر آن بر پایداری در شیب‌های متنوع، مصرف مخصوص انرژی، پایداری در ازای تغییر آن پارامتر، مقدار نوسان پاها و سرعت حرکت بررسی می‌شود. نتایج حاصل در مقایسه با نتایج بررسی‌های پیشین مقایسه و مجموعه نتایج حاصل در جدولی بطور خلاصه ارائه می‌شود. این جدول شامل اطلاعاتی در مورد اثر تغییر هر پارامتر بر مشخصات حرکتی و پایداری مدل، پیشنهاد بازه‌ی بهینه برای آن پارامتر و مقایسه‌ی بازه‌ی پیشنهادی با مقدار متوسط پارامتر متناسب با آن در بدن یک انسان واقعی است.

با توجه به اثر تغییر هر پارامتر بر حرکت و پایداری راهرونده، با تعریف تابع برازش مناسب به کمک الگوریتم ژنتیک کل پارامترها در چند مرحله بهینه‌یابی شده و یک مدل بهینه در انتها ارائه شده است. **کلید واژه‌ها:** دوپا، قدم‌زنی غیرفعال، پایداری، تحلیل پارامتری، بهینه سازی

مدل سازی

مدل گسترش یافته‌ی مورد استفاده برگرفته از ساده‌ترین مدل دوپای گارسیا می باشد با این تفاوت که لینک‌های پاها می‌توانند دارای جرم گسترده باشند، موقعیت مرکز جرم می تواند در امتداد پا در هر نقطه واقع شود و شکل کف پا می تواند به صورت دایره‌ای و دارای شعاع مشخص باشد، در میان دوپا یک فنر پیچشی نیز افزوده

* هم‌اکنون دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف.

¹ McGeer

ماتریس شتاب جابجایی سیستم:

$$D = \frac{\sigma(T_{q,q})}{\sigma q} \dot{q} \quad (4)$$

$$D = \begin{bmatrix} [(l-c)\sin\theta]\dot{\theta}^2 \\ [-(l-c)\cos\theta]\dot{\varphi}^2 \\ 0 \\ [l\sin\theta]\dot{\theta}^2 \\ [-l\cos\theta]\dot{\varphi}^2 \\ 0 \\ [l\sin\theta + c\sin(\varphi-\theta)]\dot{\theta}^2 + [c\sin(\varphi-\theta)]\dot{\varphi}^2 + [-2c\sin(\varphi-\theta)]\dot{\theta}^2\dot{\varphi}^2 \\ [-l\cos\theta + c\cos(\varphi-\theta)]\dot{\theta}^2 + [c\cos(\varphi-\theta)]\dot{\varphi}^2 + [-2c\cos(\varphi-\theta)]\dot{\theta}^2\dot{\varphi}^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم سیستم و ماتریس نیروهای گرانشی:

$$M = \text{diag}[m \ m \ l \ M \ M \ l \ m \ m] \quad (5)$$

$$f = M[\sin y \ -\cos y \ 0 \ \sin y \ -\cos y \ 0 \ \sin y \ -\cos y]^T g \quad (6)$$

که در آن g بیان گر شتاب گرانشی زمین است.

برای نیروی اعمالی توسط فنر (ماتریس Q_s) داریم:

$$Q = Q_s = [0 \ -q]^T k \quad (7)$$

در انتها با تشکیل ماتریس های کاهش یافته، شتاب مختصه های عمومی بر حسب مشتق اول و خود مختصه ها بدست می آید که قابل جاگذاری در روند حل عددی است.

$$\bar{M} = T^T M \quad (8)$$

$$T = T_{q,q} \quad (9)$$

$$\bar{f} = T^T [\Sigma f - MD] + Q \quad (10)$$

$$\bar{M} \ddot{q} = \bar{f} \quad (11)$$

تعیین لحظه (شرط) برخورد: زمان تماس پای نوسان گر با

زمین، به عنوان زمان برخورد و تعویض پای تکیه گاه در نظر گرفته می شود. برای مدل متقارن در این لحظه شرط زیر برقرار است:

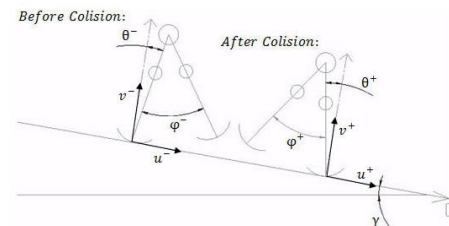
$$\varphi = 2\theta \quad (12)$$

قوانین برخورد (انتقال): با توجه به اصل بقای اندازه حرکت:

$$T^+ M T^+ (q_o^+) = T^+ M T^- (q_o^-) \quad (13)$$

که در آن ماتریس T^+ ماتریس انتقال سرعت بر اساس دستگاه

جدید پس از برخورد پای نوسان کننده با زمین و T^- ماتریس انتقال سرعتها بر حسب دستگاه، قبل از برخورد.



شکل ۲: نمایی از ربات و نامگذاری زاویه ها قبل و بعد از برخورد

مختصه های پس از ضربه را با زیرنویس n (new) و قبل از

ضربه را با زیرنویس o (old) نامگذاری کرده ایم. داریم:

$$\begin{cases} \theta_n^+ = -\theta_o^- = \theta_o^- - \varphi_o^- \\ \theta_n^+ = \theta_o^+ - \varphi_o^+ \\ \varphi_n^+ = -2\theta_o^- = -\varphi_o^- \\ \varphi_n^+ = -\varphi_o^+ \end{cases} \quad (14)$$

تحلیل معادلات: تابع گام (شامل معادله ی حرکت مدل)، مشخصات

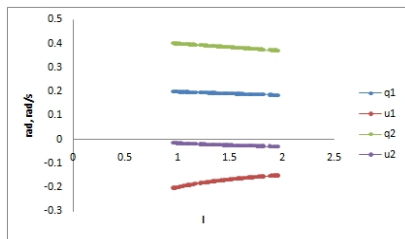
سیستم بلافاصله پس از یک برخورد را، به عنوان ورودی می گیرد. در

طول بردار فضای فاز به صورت پیشرو انتگرال گیری می کند، برخورد

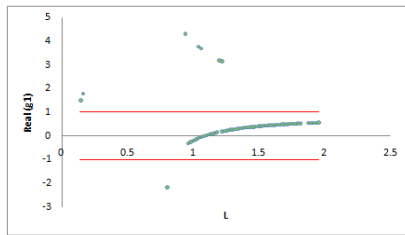
پا با زمین را تشخیص می دهد و ناپیوستگی در سیستم حرکت به دلیل برخورد پا با زمین و تعویض پای تکیه گاه و نوسان کننده را اعمال کرده و مشخصات سیستم درست بعد از برخورد بعدی را به عنوان خروجی گزارش می کند. زمانی که خروجی تابع برابر ورودی آن باشد، مشخصات سیستم یک نقطه ی ثابت برای نقشه ی تابع گام است و چرخه ی طی شده متناظر به آن نقطه، چرخه ی حدی راهروند است. بر اساس بررسی پایداری به شیوه ی خطی سازی، اگر قدرمطلق تمام مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبین تابع گام که در یک نقطه ی ثابت ارزیابی شده، همگی کمتر از یک باشند، در این صورت آن نقطه ی ثابت و چرخه ی حدی متناظر با آن به طور مجانبی پایدار^۳ خواهد بود. چرخه ی حدی مرتبه ی اول و رفتار سیستم تا قبل از پدیده ی دوشاخگی بررسی شده است.

تحلیل اثر تغییر پارامترها

در هر مرحله، تنها یک پارامتر از ساده ترین مدل راهرونده (مدل گارسیا) را تغییر داده و اثر آن بر مشخصه های چرخه ی حدی حرکت، مصرف انرژی، سرعت و پایداری مدل از منظر ۴ معیار متغیرهای فضای فاز، سرعت بدون بعد که نشان دهنده ی راندمان حرکتی راهرونده هستند، محدوده ی پایداری در ازای تغییر آن پارامتر و پایداری در شیب های تندتر که نشان دهنده ی مشخصه های پایداری مدل هستند، بررسی می شود. برای نمونه، نمودارهای حاصل از تغییر پارامتر اندازه طول پا ارائه شده است:

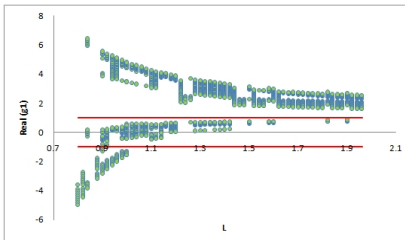


شکل ۳: تغییرات نقاط ثابت با تغییر طول پاها در شیب ۰/۰۰۹ رادیان



شکل ۴: مقدار حقیقی مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبین تابع در نقاط ثابت، در

ازای تغییر نسبت جرم ها برای شیب ۰/۰۰۹ رادیان



شکل ۵: مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبین بر حسب تغییر طول پا

همزمان با تغییر شیب

³ Asymptotically stable

² Transition rules

بهینه‌سازی

تابع برازش با توجه به دو معیار سرعت بی‌بعد (نشان‌دهنده‌ی راندمان مصرف انرژی) و میزان نوسان زاویه‌ی پا (نشان‌دهنده‌ی نزدیکی شکل حرکت به شکل گام برداشتن انسان) تعریف شده است.

$$fitness\ Function = \frac{\theta^*}{nondimensionam\ valocity} \quad (15)$$

ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار Matlab در جهت کمینه کردن تابع برازش پیش می‌رود، لذا تابع فوق در حالت کمینه، بهینه خواهد بود.

جدول ۲: ترکیب‌های بهینه‌ی بدست آمده برای پارامترهای مدل

		متغیرهای مورد بررسی						عدد بrazh
مدل بهینه ↓	$\frac{M}{m}$	I	L	c	r	k	$\left(\frac{\theta^*}{v_{nd}}\right)$	
مدل مبنا	1000	0	1	1	0	0	1.954	
مرتبه ی اجرای روش بهینه سازی	1	634.6	0.01	1.47	0.53	0.16	3.16	0.383
	2*	65.88	0.01	1.47	0.44	0.80	3.16	0.319
	3	225.3	0.03	1.06	0.40	0.81	2.49	0.405
	4*	224.3	0.03	1.06	0.40	0.81	3.99	0.326
	5	51	0	1.42	0.35	0.25	2.19	0.296
	6*	51.25	0	1.42	0.35	0.25	3.19	0.237
	7**	146.3	0	1.42	0.35	0.82	3.19	0.249
مدل هایی که برای آن‌ها چرخه‌ی حدی پایدار پیدا نشد							15	
بهترین نتیجه از ۶ مرتبه اجرای روش، به عنوان مرجع در اجرای مرتبه‌ی ۷ قرار گرفته است.								

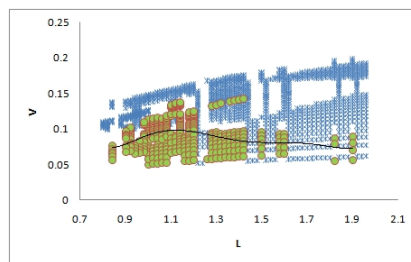
در مجموع ۲۱۰۰ ترکیب مختلف از ۶ متغیر ورودی، بررسی و ارزش‌گذاری شده است. نتایج ردیف‌های مشخص شده با ستاره، با فرض نقطه‌ی بهینه‌ی ردیف بالا به عنوان یکی از اعضای جامعه‌ی نمونه‌ی اول، برآورد شده است.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

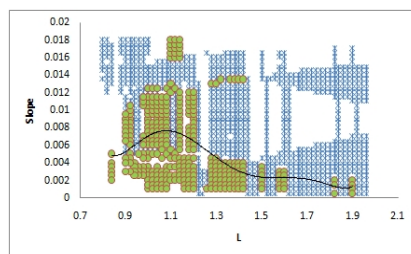
مقایسه‌ی ارائه شده در جدول ۱ نشان می‌دهد برای برآورد مقدار بهینه‌ی پارامترهای ابعادی مانند طول یا اندازه‌ی شعاع پا معیار میزان نوسان پاها و برای پارامترهایی که نقش ذخیره و آزاد کننده‌ی انرژی را دارند مانند فنر، معیار اعمال اغتشاش از نوع انرژی یا ممان خارجی تعیین کننده است. بطوری که اثر نامناسب افزایش بیش از حد سختی فنر بر پایداری، تنها در تحقیق تورسن مشخص شده اما اثر افزودن بیش از حد طول پا یا شعاع آن بر شکل حرکتی مدل در تحقیق حاضر خود را نشان می‌دهد.

در ادامه بهینه‌سازی به روش ژنتیک حدود بهینه‌ی پارامترها را نشان داده و می‌تواند به طور کلی، برآوردی از حالت بهینه، زمانی که مجموعه‌ای از پارامترها مورد تغییر قرار می‌گیرند را در اختیار قرار دهد. بطور مثال مدل‌های بهینه‌ی حاصل در جدول ۲، در ازای طول پای کم، نسبت جرم مفصل ران به جرم پای زیاد دارند، سختی فنر مفصل ران در آن‌ها زیاد و اینرسی دورانی پای کمی دارند.

از مجموعه نتایج فوق می‌توان برای پی‌ریزی روند طراحی و ساخت نمونه‌های عملی بهینه از راه‌روندهای غیرفعال، بهره برد.



شکل ۶: تغییر سرعت بی‌بعد متناسب با تغییر طول پا، همزمان با تغییر شیب



شکل ۷: شیب‌های دارای چرخه‌ی حدی نسبت به تغییر طول پا در قالب جدول ۳ تاثیر تغییر هرکدام از پارامترها بر مشخصه‌های حرکتی و پایداری راه‌رونده ارائه شده است. با هدف مقایسه‌ی نتایج حاصل با تحقیق‌های مشابه دیگر، از میان تحقیق‌های انجام شده در این زمینه دو مورد را انتخاب می‌کنیم. تحقیقات میشل کلمان [۵] در دانشگاه کرنل در ۱۹۹۸ که بر اساس حل عددی مدل خود به ارزیابی اثر پارامترهای مختلف بر پایداری آن بر اساس معیار شیب و سرعت پرداخت و تحقیقات ایوار تورسون [۶] از دانشگاه ناگویا ژاپن در سال ۲۰۰۸ که برپایه‌ی افزودن اغتشاش ممان و انرژی میزان پایداری مدل را در ازای تغییر پارامترهای آن مورد بررسی قرار داده است. نتایج با یکدیگر هم‌خوانی داشته و یکدیگر را تکمیل می‌کنند.

راه‌روندهای غیرفعال

	مدل‌سازی کلمان (**)	مدل‌سازی تورسون (***)	تحقیق پیش رو
نسبت جرم مفصل ران به پا	** افزایش آن سرعت را زیاد می‌کند و پایداری را ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌دهد.	** افزایش آن سرعت را زیاد می‌کند و پایداری را ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌دهد.	افزایش آن سرعت و پایداری را افزایش می‌دهد و برای نسبت جرم‌های زیاد افزایش سرعت محسوس نبوده و پایداری کاهش می‌یابد.
لختی پا	* با افزایش آن راندمان کم شده و سیستم ناپایدار می‌شود.	* با افزایش آن راندمان کم شده و سیستم ناپایدار می‌شود.	افزایش آن، پایداری، سرعت و راندمان را کاهش می‌دهد.
طول پا	** افزایش آن پایداری را ابتدا افزایش، سپس کاهش و سرعت را کاهش می‌دهد.	** افزایش آن پایداری را ابتدا افزایش، سپس کاهش و سرعت را کاهش می‌دهد.	خارج از محدوده‌ی ۰/۸ تا ۱/۲ ناپایدار بوده و افزایش آن سرعت بی‌بعد را بالا می‌برد.
فاصله‌ی مرکز جرم پا از مفصل ران	* بالا بردن آن ابتدا سیستم را ناپایدار، سپس در نزدیکی مفصل ران دوباره پایدار می‌کند.	* بالا بردن آن ابتدا سیستم را ناپایدار، سپس در نزدیکی مفصل ران دوباره پایدار می‌کند.	بالا بردن آن سرعت را افزایش، پایداری را ابتدا افزایش و پس از ۰/۳۵ کاهش می‌دهد. سپس مدل ناپایدار، و در نزدیک مفصل پایدار می‌شود.
شعاع متقارن کف پا	** افزایش آن پایداری و سرعت را افزایش می‌دهد.	** افزایش آن پایداری و سرعت را افزایش می‌دهد.	افزایش آن سرعت را افزایش داده و تا محدوده‌ی ۰/۸، افزایش آن همراه با افزایش پایداری است.
سختی فنر مفصل ران	** با افزایش آن سرعت ابتدا افزایش و پایداری را ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌دهد.	** با افزایش آن سرعت ابتدا افزایش و پایداری را ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌دهد.	افزایش آن، سرعت و پایداری را افزایش می‌دهد بویژه با افزایش آن بیش از مقدار ۰/۸.

⁴ Michael John Coleman

⁵ Ivar Thorson

⁶ Nagoya university

جدول ۳: اثر تغییر پارامترهای مدل بر مشخصه های حرکتی و پایداری آن

پارامترهای حرکتی	پایداری حرکت		مصرف مخصوص انرژی و راندمان		محدوده‌ی پیشنهادی (مقدار متوسط برای انسان)
	پایداری در ازای شیب‌های متنوع	محدوده‌ی پایداری در ازای شیب ۰/۰۰۹ رادیان	سرعت بی‌بعد در شیب یکسان	زاویه نوسان یا (طول گام)	
پارامترهای مورد بررسی در مدل ↓					
نسبت جرم مفصل ران به پا	تا محدوده‌ی ۲۰۰ تا ۳۰۰ با افزایش آن در شیب‌های بیشتر پایدارتر خواهد بود. از نسبت ۱۰۰۰ به بالا در شیب‌های کم ناپایدار می‌شود.	در ازای نسبت جرم بسیار بالا ممکن است ناپایدار شود.	تا نسبت ۳۰۰ با شیب زیاد افزایش می‌دهد اما پس از آن افزایش محسوس نیست.	افزایش می‌دهد	۲۰۰ تا ۳۰۰ (۱۰)
لختی پا	کاهش پایداری با افزایش لختی	تنها در محدوده ۰ تا ۰/۰۶۵ پایدار می‌ماند.	با افزایش لختی، سرعت کاهش می‌یابد.	بی اثر	۰/۰۶۵ تا ۰/۰۲۵ (۰/۰۳۳)
طول پا	در محدوده‌ی ۱/۱ تا ۱/۶ بیشترین پایداری در ازای شیب‌های بالا را دارد.	در ازای طول پای بالاتر از ۰/۸۸ ناپایدار می‌شود.	افزایش طول پا سرعت را افزایش می‌دهد.	افزایش آن میزان نوسان و طول گام را کاهش می‌دهد.	۱/۱ تا ۱/۱۶ (۰/۸۸)
فاصله‌ی مرکز جرم پا از مفصل ران	در فاصله‌ی ۰/۳۵ تا ۰/۴۵ و بویژه در اندازه‌ی ۰/۳۵ در شیب‌های تندتری پایدار می‌ماند.	در محدوده‌ی ۰/۰۴ تا ۰/۱۸ ناپایدار می‌شود.	تزدیک شدن آن به مفصل ران سرعت را افزایش می‌دهد.	بالا رفتن مرکز جرم نوسان پا و طول گام را کم می‌کند.	۰/۳۵ تا ۰/۴۵ (۰/۳۳)
شعاع متقارن کف پا	در ۰/۶ تا ۰/۸ بیشترین پایداری را بویژه در ۰/۶۶ تا ۰/۶۷ دارد.	برای شعاع پا بالاتر از ۰/۸۸ ناپایدار می‌شود.	سرعت با افزایش شعاع پا افزایش می‌یابد.	با افزایش آن، نوسان و طول گام افزایش می‌یابد.	۰/۸ تا ۰/۶۵ (۰/۲ - متغیر)
سختی فنر مفصل ران	افزایش پایداری با افزایش سختی بویژه بیش از ۰/۸ که مدل در شیب‌های بسیار کوچک نیز پایدار می‌شود.	همواره پایدار می‌ماند	افزایش سرعت با افزایش سختی	کاهش نوسان بالا تنه و طول گام با افزایش سختی	بالاتر از ۰/۸ (متغیر)

مراجع

- [7] Kruz, Max J. N. Judkins, Timothy. 2008 "A Passive Dynamic Walking Robot That Has a Deterministic Nonlinear Gait". Elsevier Publisher. Journal of Biomechanics.
- [8] Wisse, M. Schwab, A.L. 2004. "Passive dynamic walking model with upper body". Biped Laboratory. Faculty of Mechanical Engineering. Delft University of Technology. Netherlands.
- [9] Collins, Steven. Ruina, Andy. 2005 "A Bipedal Walking Robot with Efficient and Human-Like Gait". Supprted by NFS Biomechanical Grants.
- [10] Tehrani Safa, Ali. Ghaffari saadat, Mohammad. Naraghi, Mahyar. 2007. "passive dynamic of the simplest walking model, replacing ramps with stairs" Elsevier Publication. Mechanism and Machine Theory. 1314-1325
- [11] Farshimi F. Naraghi, M. 2010 "A passive-biped model with multiple routes to chaos," Journal of Acta Mechanica Sinica.
- [۱۲] آزادی یزدی، احسان. ۱۳۸۶ "کنترل هندسی ربات دوپا با استفاده از روش‌های برپایه‌ی انرژی." پایان‌نامه‌ی دکتر. دانشکده‌ی مهندسی مکانیک. دانشگاه صنعتی شریف. تهران.
- [1] Garcia, Mariano, Chatterjee, Anindya, Ruina, Andy, Coleman, Michael, 1998. "The Simplest Walking Model Stability, Complexity, and Scaling", Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, USA.
- [2] DAS, S. L., Chatterjee, A., 2002, "An Alternative Stability Analysis Technique for The Simplest Walker", Kluwer Academic Publishers , Nonlinear Dynamics, 28: 273-284
- [3] Johnston, Thomas, 2004. "A Limit Cycle Analysis of the Simplest Passive Dynamic Walker", Dept. of Biomechanical Engineering, USDAVIS.
- [4] Hobbelen, Daan. Wisse, Martijn. 2007. "Limit Cycle Walking". Humanoid Robots: Human-like Machines. www.techonline.com.
- [5] Coleman, Michael Jon. 1998. "A Stability Study of a 3-Dimensionam Passive Dynamic Model of Human Gait". PhD. Thesis. Cornell University. USA.
- [6] Thorson, Ivar. 2008 "On the Gait Robustness of Passive Dynamic Robots, and a Novel Variable Stiffness Series Elastic Actuator". PHD. Thesis. Nagoya University. Japan. PDF.