# تمرین های مکانیک تحلیلی II

تاریخ تحویل: ۲۲ اسفند ۱۳۹۰

۲۴ اسفند ۱۳۹۰

۱. نیروی جاذبه بین دو ذره از رابطه زیر بدست می آید

$$\mathbf{f}_{12} = k[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{r}{v_0}(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)]$$

که در اینجا $k$ عددی ثابت، $v_0$ سرعت ثابت و $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. گشتاور نیروی داخلی سیستم را محاسبه کنید؛ چرا این کمیت صفر نمی شود؟ آیا این سیستم پایسته است؟

حل:

$$\tau = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{f}_{12} = -\frac{r}{v_0}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)$$

چون نیروهای داخلی مرکز گریز نیستند گشتاور این نیروها صفر نمی شود. بله اندازه حرکت خطی در این سیستم پایسته است زیرا قانون سوم نیوتن برقرار است $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$

۲. یک توپ بیلیارد با سرعت اولیه $v_0$ با توپ بیلیارد دیگری (به همان جرم)، که در ابتدا ساکن است، برخورد می کند. توپ اولی در امتداد $\psi = 45^0$ حرکت می کند. در یک برخورد کشسان سرعت توپها پس از برخورد چقدر است؟ توپ دومی در دستگاه آزمایشگاهی از چه زاویه ای خارج می شود؟

حل: بقا اندازه حرکت خطی

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v'_1 \cos 45^0 + v'_2 \cos\alpha \\ 0 = v'_1 \sin 45^0 + v'_2 \sin\alpha \end{cases} \quad (۱)$$

بقا انرژی

$$\epsilon = 1 \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} = \frac{{\mathbf{p}'_1}^2}{2m_1} + \frac{{\mathbf{p}'_2}^2}{2m_2} \Rightarrow v'_2 = \sqrt{v_1^2 - {v'_1}^2} \quad (۲)$$

برای حذف $\alpha$ و $v'_2$ به روش زیر عمل می کنیم

$$v_1 - v'_1 \cos 45^0 = v'_2 \cos\alpha = \sqrt{v_1^2 - {v'_1}^2}\sqrt{1 - \left(\frac{v'_1}{v'_2}\right)^2 \sin^2 45^0} = \sqrt{v_1^2 - {v'_1}^2(1 + \sin^2 45^0)} \quad (۳)$$

که برای ساده سازی دو طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم

$$v_1^2 + {v'_1}^2 \cos^2 45^0 - 2v_1 v'_1 \cos 45^0 = v_1^2 - {v'_1}^2(1 + \sin^2 45^0) \Rightarrow 2{v'_1}^2 = 2v_1 v'_1 \cos 45^0$$
$$\Rightarrow v'_1 = v_1 \cos 45^0, \qquad v'_2 = \sqrt{v_1^2 - {v'_1}^2} = v_1 \sin 45^0 \quad (۴)$$

برای محاسبه زاویه ایی که توپ دوم خارج می شود از معادله (۱) استفاده می کنیم

$$\cos\alpha = \frac{v_1 - v'_1 \cos 45^0}{v_1 \sin 45^0} = \sin 45^0 \quad (۵)$$

۳. نشان دهید در مختصات آزمایشگاهی

$$\frac{T_1'}{T_1} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} S^2$$

که در اینجا

$$S = \cos\phi_1 + \frac{\cos(\theta-\phi_1)}{(m_1/m_2)}$$

حل: برای بدست آوردن

$$\beta^2 := \frac{T_1'}{T_1} = \frac{{v_1'}^2}{v_1^2} \Rightarrow \beta = \frac{v_1'}{v_1} \qquad (۶)$$

دقیقن مانند مسئله قبل عمل می کنیم با این تفاوت که $m_1 \neq m_2$ است و در نهایت بعد از به توان ۲ رساندن به

$$v_1^2\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right) - {v_1'}^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) + 2\frac{m_1}{m_2} v_1 v_1' \cos\phi_1 = 0 \qquad (۷)$$

میرسیم.

$$\Rightarrow \beta^2 - 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\beta\cos\phi_1 - \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} = 0 \qquad (۸)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\phi_1 \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\phi_1 + \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}} \\ &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\cos\phi_1 \pm \sqrt{\cos^2\phi_1 + \frac{m_2^2-m_1^2}{m_1^2}}\right) \\ &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\cos\phi_1 \pm \frac{m_2}{m_1}\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\phi_1}\right) \qquad (۹)\end{aligned}$$

برای ساده کردن این معادله از رابطه کتاب استفاده می کنیم

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\theta} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}\sin\phi_1 = \sin(\theta-\phi_1). \qquad (۱۰)$$

پس

$$S = \cos\phi_1 \pm \frac{m_2}{m_1}\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\phi_1} = \cos\phi_1 + \frac{\cos(\theta-\phi_1)}{(m_1/m_2)} \qquad (۱۱)$$

۴. ذره ای به جرم $m$ با زاویه $\theta$ نسبت به قائم، به دیورا صافی برخورد می کند. ضریب بازگشت $\epsilon$ است. سرعت و زاویه بازتاب ذره را پس از ترک دیوار پیدا کنید.

حل:

$$\begin{cases} v_x = v\sin\theta \\ v_y = v\cos\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x' = v'\sin\phi \\ v_y' = v'\cos\phi \end{cases} \qquad (۱۲)$$

برخورد در راستای محور $x$ انجام می شود پس در راستای محور $y$ اندازه حرکت خطی بقا دارد

$$mv_y' = mv_y \Rightarrow \frac{v}{v'} = \frac{\cos\phi}{\cos\theta}, \qquad \epsilon = \frac{v_x'}{v_x} \Rightarrow \tan\phi = \epsilon\tan\theta \qquad (۱۳)$$

و برای بدست آوردن $v'$

$${v'}^2 = v^2(\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta) \Rightarrow v' = v\sqrt{\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta} \qquad (۱۴)$$

۵. تمرین ۹.۷ کتاب فاولز

حل: انرژی تلف شده به صورت گرما در همه دستگاه ها برابر است پس در دستگاه مرکز جرم مسئله را حل می کنیم(دقت کنید مسئله یک بعدی است)

$$\bar{p_1} + \bar{p_2} = \bar{p'_1} + \bar{p'_2} = 0$$
$$Q = \frac{1}{2\mu}(\bar{p_1}^2 - \bar{p'_1}^2) = \frac{m_1^2}{2\mu}(\bar{v_1}^2 - \bar{v'_1}^2) \qquad (۱۵)$$

طبق تعریف

$$\epsilon = \frac{|\bar{v'_2} - \bar{v'_1}|}{|\bar{v_2} - \bar{v_1}|} \Rightarrow \bar{v'_2} = \bar{v'_1} \pm \epsilon v, \qquad v = |\bar{v_2} - \bar{v_1}| = |-\frac{m_1}{m_2}\bar{v_1} - \bar{v_1}| = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\bar{v_1} \qquad (۱۶)$$

پس

$$m_2\bar{v'_1} \pm m_2\epsilon v + m_1\bar{v'_1} = 0 \Rightarrow \bar{v'_1} = \frac{\pm m_2}{m_1 + m_2}\epsilon v \qquad (۱۷)$$

و انرژی اتلافی

$$Q = \frac{m_1^2}{2\mu}\left(\left(\frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_2 v\epsilon}{m_1 + m_2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2) \qquad (۱۸)$$