تمرین های مکانیک تحلیلی II

تاریخ تحویل: ۲۸ فروردین ۱۳۹۱

۲۰ فروردین ۱۳۹۱

۱. دو دستگاه مختصات O و O' با مختصات x_i و X_i با رابطه زیر به یکدیگر مرتبط هستند

$$X_i = a_i + x_i \tag{۱}$$

که a_i مولفه های بردار ثابتی هستند. جسمی حول محوری که از مبدا O می گذرد می چرخد و گشتاور لختیش

$$J_{jk} = \sum_i m_i \left(\delta_{jk} \sum_\alpha X_{i\alpha}^2 - X_{ij} X_{ik} \right) \tag{۲}$$

است. همان جسم را حول محوری دیگر که از مبدا O'می گذرد می چرخانیم و گشتاور لختیش

$$I_{jk} = \sum_i m_i \left(\delta_{jk} \sum_\alpha x_{i\alpha}^2 - x_{ij} x_{ik} \right) \tag{۳}$$

است. نشان دهید گشتاور لختی ها با رابطه زیر به هم مربوطند.

$$I_{jk} = J_{jk} - M \left(\delta_{jk} a^2 - a_j a_k \right) \tag{۴}$$

۲. دو دستگاه مختصات که مبدا یکسان دارند و مولفه هایشان با رابطه زیر به هم مربوطند را در نظر بگیرید.

$$x' = Ax \tag{۵}$$

و

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \tag{۶}$$

و A ماتریسی 3×3 و متعامد است و حاصل دورانی پیوسته است:

$$A^T A = 1, \qquad \det A = 1. \tag{۷}$$

الف) نشان دهید بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{p}$ و $\vec{L}$ در نمایش ماتریسی خود با رابطه های زیر تبدیل می شوند.

$$v' = Av, \qquad p' = Ap, \qquad L' = AL \tag{۸}$$

که در نتیجه تانسور هستند. ب) نشان دهید گشتاور لختی I_{jk} در شکل ماتریسی خودش به صورت تانسوری تبدیل می شود.

$$I' = AIA^{-1} \tag{۹}$$

ج) نشان دهید در هر دستگاه مختصاتی که به شکل بالا تبدیل شود داریم

$$\det I' = \det I, \qquad trI' = trI \tag{۱۰}$$

که tr رد تانسور است که به شکل

$$trI = \sum_k I_{kk} \tag{۱۱}$$

تعریف می شود. د) برای یافتن محور های اصلی ماتریس گشتاور لختی را قطری می کنیم و ریشه های معادله

$$\det(I - \lambda 1) = 0 \tag{۱۲}$$

را می یابیم. بردارهای چرخش محورهای اصلی در رابطه

$$I\omega = \lambda\omega \tag{۱۳}$$

صدق می کنند. اگر سه بردار یکه چرخش محورهای اصلی n_1 و n_2 و n_3 متناظر با سه ریشه معادله دترمینانی λ_1 و λ_2 و λ_3 باشند. نشان دهید چون $I = I^T$ در نتیجه

$$n_i^T n_j = \delta_{ij}, \qquad \omega_i = |\omega| n_i \tag{۱۴}$$

در نتیجه سه بردار محورهای اصلی بر هم عمودند. ه) نشان دهید اگر ماتریس تبدیل مختصات A را به شکل زیر بسازیم ماتریس گشتاور لختی I' را قطری می کند.

$$A = \begin{pmatrix} n_1^T \\ n_2^T \\ n_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \tag{۱۵}$$

ی) نشان دهید این A در معادله (۷) صدق میکند.