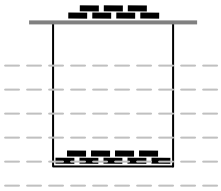
به نام خدا

نمایش لیوان پلاستیکی و سکّه‌ها

وسایل لازم: یک لیوان پلاستیکی سبک، ۵۰ عدد سکه‌ی یکسان، درپوش سبک برای لیوان (مقوایی که کمی بزرگتر از دهانه‌ی لیوان است)، یک ظرف آب بزرگ.

تعدادی سکه داخل لیوان بگذارید و آن را روی آب شناور کنید. بعد درپوش را روی دهانه‌ی لیوان بگذارید و کم‌کم روی آن سکه قرار دهید (شکل ۱). سکه‌ها را با احتیاط روی مقوا بگذارید و مواظب باشید که تعادل لیوان به‌هم نخورد. بعد از این‌که تعداد سکه‌ها به حد معیّنی رسید، دیگر نمی‌توان تعادل لیوان را حفظ کرد. تعداد سکه‌های داخل لیوان و روی درپوش را جداگانه بشمارید و یادداشت کنید.

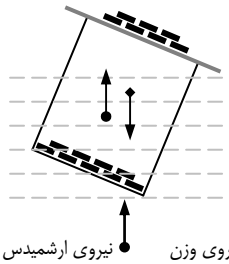


شکل ۱. تعدادی از سکه‌ها را داخل لیوان و تعدادی را روی درپوش قرار داده‌ایم.

اگر مجموع سکه‌های دفعه‌ی قبل را فقط در داخل لیوان بگذارید (و نه روی روی درپوش)، لیوان تعادل خود را حفظ می‌کند.

سؤال: چرا اگر سکه‌ها را روی درپوش قرار دهیم، لیوان واژگون می‌شود، درحالی که اگر همان سکه‌ها را داخل لیوان بگذاریم، لیوان تعادل خود را حفظ می‌کند؟

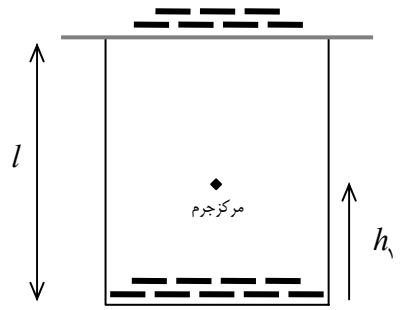
سؤال: چه رابطه‌ای میان تعداد سکه‌های داخل لیوان و بیشترین تعداد سکه‌هایی که می‌توان قبل از واژگون‌شدن روی درپوش قرار داد وجود دارد؟



شکل ۲. اگر روی لیوان سکه بگذاریم، مرکزجرم لیوان بالاتر می‌آید. اگر مرکزجرم از مرکز شناوری بالاتر باشد، لیوان با اندکی انحراف واژگون می‌شود.

برای پاسخ به پرسش‌های بالا باید بدانیم که نقطه‌ی اثر هرکدام از نیروهای وزن و ارشمیدس کجاست. در حالتی که فقط داخل لیوان سکه گذاشته باشیم، مرکزجرم آن نزدیک به کف لیوان است و پایین‌تر از مرکز شناوری (یعنی همان نقطه‌ی اثر نیروی ارشمیدس) قرار دارد. ولی اکنون به خاطر وجود سکه‌های روی درپوش، مرکزجرم بالاتر آمده‌است. اگر روی درپوش آن‌قدر سکه گذاشته باشیم که مرکزجرم از مرکز شناوری بالاتر بیاید، تعادل لیوان به‌هم می‌خورد و واژگون می‌شود (شکل ۲).

برای آن‌که به پرسش دوم پاسخ دهیم، یعنی یک رابطه‌ی ریاضی بین تعداد سکه‌های داخل و روی لیوان پیدا کنیم، باید توجه کنیم که در آستانه‌ی واژگونی، مرکزجرم و مرکز شناوری روی هم منطبق می‌شوند. پس باید ارتفاع مرکزجرم و مرکز شناوری را برحسب تعداد سکه ها به‌دست بیاوریم و آنگاه این دو ارتفاع را با هم مساوی قرار دهیم.



شکل ۳. مکان مرکزجرم بر حسب فاصله از کف لیوان

فرض کنید که n_1 سکه را داخل لیوان و n_2 سکه را روی لیوان قرار داده‌ایم (شکل ۳). اگر جرم لیوان در مقایسه با جرم سکه‌ها ناچیز باشد، فاصله‌ی مرکزجرم از کف لیوان با این رابطه به‌دست می‌آید:

$$h_1 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} l$$

(اگر نمی‌دانید که چرا این رابطه درست است، به یاد بیاورید که سکه‌ها نقش همان گیره‌های کاغذ را بازی می‌کنند که به دوسر یک نی وصل کرده بودیم. مثلاً اگر دو سکه در پایین و یک سکه در بالا بگذاریم، ارتفاع مرکزجرم (h_1) یک‌سوم ارتفاع کلّ لیوان است.)

مرکز شناوری در میانه‌ی قسمت غوطه‌ور در آب قرار دارد. اگر لیوان تا ارتفاع h در آب فرو رفته باشد، ارتفاع مرکز شناوری از کف لیوان $\frac{h}{۲}$ است:

$$h_۲ = \frac{h}{۲}$$

همان‌طور که گفتیم، در لحظه‌ی واژگون‌شدن، مرکز شناوری و مرکزجرم در یک ارتفاع هستند. از روابط قبلی داریم:

$$\frac{n_۲}{n_۱ + n_۲} l = \frac{h}{۲}$$

$$n_۲ = \frac{h}{۲l - h} n_۱$$

پس با دانستن تعداد سکه‌های کف لیوان، می‌توانیم حداکثر تعداد سکه‌های روی درپوش لیوان را پیش‌بینی کنیم.

مانند هر مدل‌سازی دیگری در فیزیک، چیزی که از فرمول به دست می‌آید کمی با مشاهده‌ی واقعی تفاوت دارد. این به‌خاطر آن است که ما در محاسبات خود همه‌ی جزئیات را در نظر نگرفته‌ایم؛ مثلاً از جرم لیوان چشم‌پوشی کرده‌ایم و ... . به نظر شما چه عوامل دیگری به‌جز جرم لیوان موجب نادقیق بودن جواب ما می‌شود؟