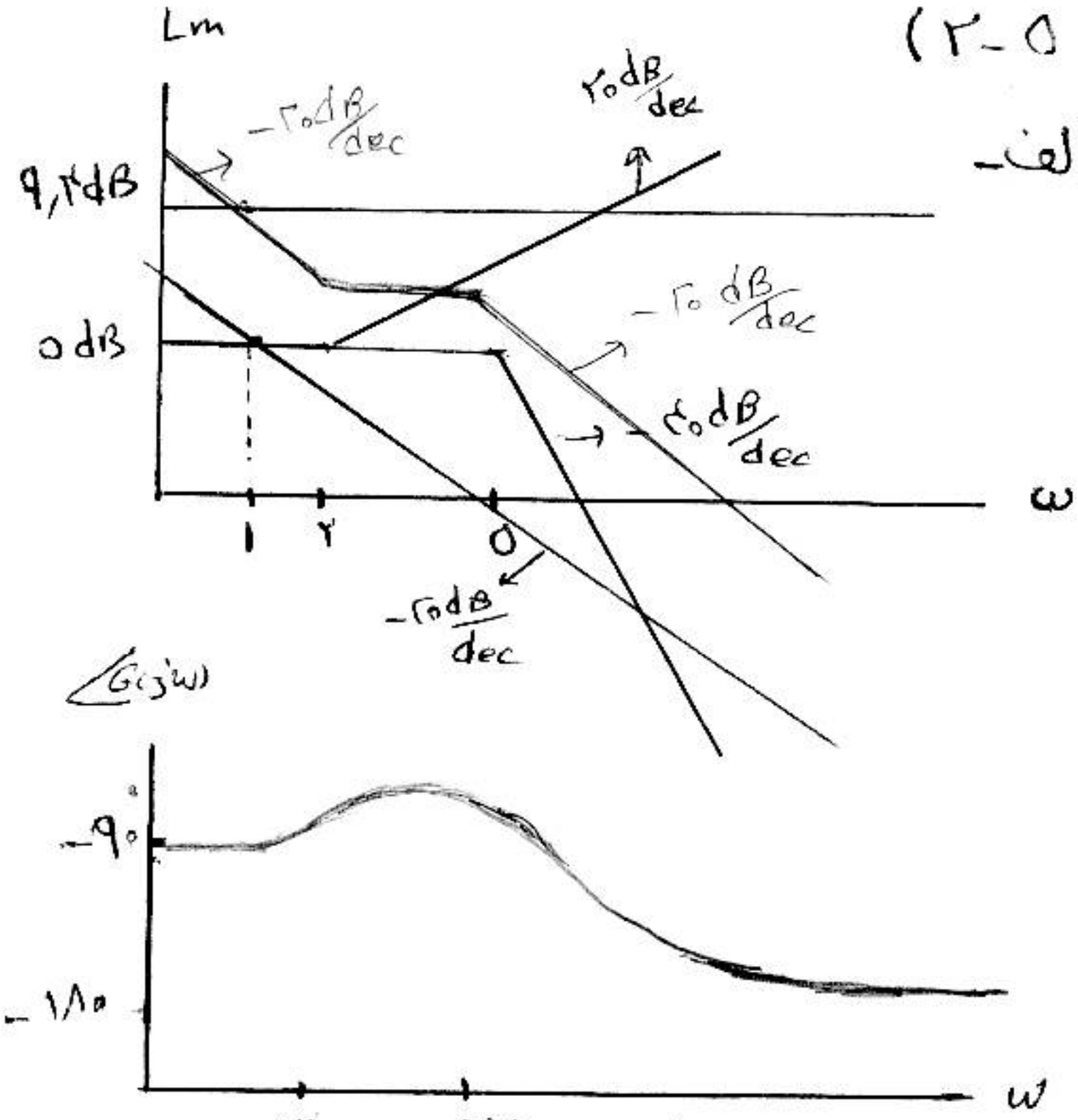
۳-۵

الف-

$$G(s)=\frac{۲۰(s+۲)}{s(s^۲+۶s+۲۵)}=\frac{۴۰(\frac{s}{۲}+۱)}{۲۵s((\frac{s}{۵})^۲+\frac{۶}{۲۵}s+۱)}$$

$$\rightarrow G(j\omega)=\frac{۴۰/۲۵(۱+j\omega/۲)}{j\omega((j\omega/۵)^۲+j\frac{۶\omega}{۲۵}+۱)}$$

	Lm	ω_c	∠
$۴۰/۲۵$	$۲۰\log ۸/۵$	—	۰
$۱+j\omega/۲$	$\omega\to۰$ ۰dB $\omega\to\infty$ $۲۰\frac{dB}{dec}$	۲	$\omega\to۰$ ۰° $\omega\to\infty$ ۹۰°
$(j\omega)^{-۱}$	$-۲۰\frac{dB}{dec}$	—	-۹۰°
$\frac{-۱}{(j\omega/۵)^۲+j\frac{۶\omega}{۲۵}+۱}$	$\omega\to۰$ ۰dB $\omega\to\infty$ $-۴۰\frac{dB}{dec}$	۵	$\omega\to۰$ ۰° $\omega\to\infty$ -۱۸۰°



ب-

$$G(s)=\frac{۴۰(۱-۰/۵s)}{s(۱+s)(۱+۰/۱s)}$$

نکته: اگر در توابع تبدیل صفرهای به صورت $(۱+j\omega T)$ داشته باشیم، (صفر سمت راست) در نمودار دامنه (اندازه) تغییری ایجاد نمی‌شود و تنها نمودار فاز تغییر می‌کند. ←

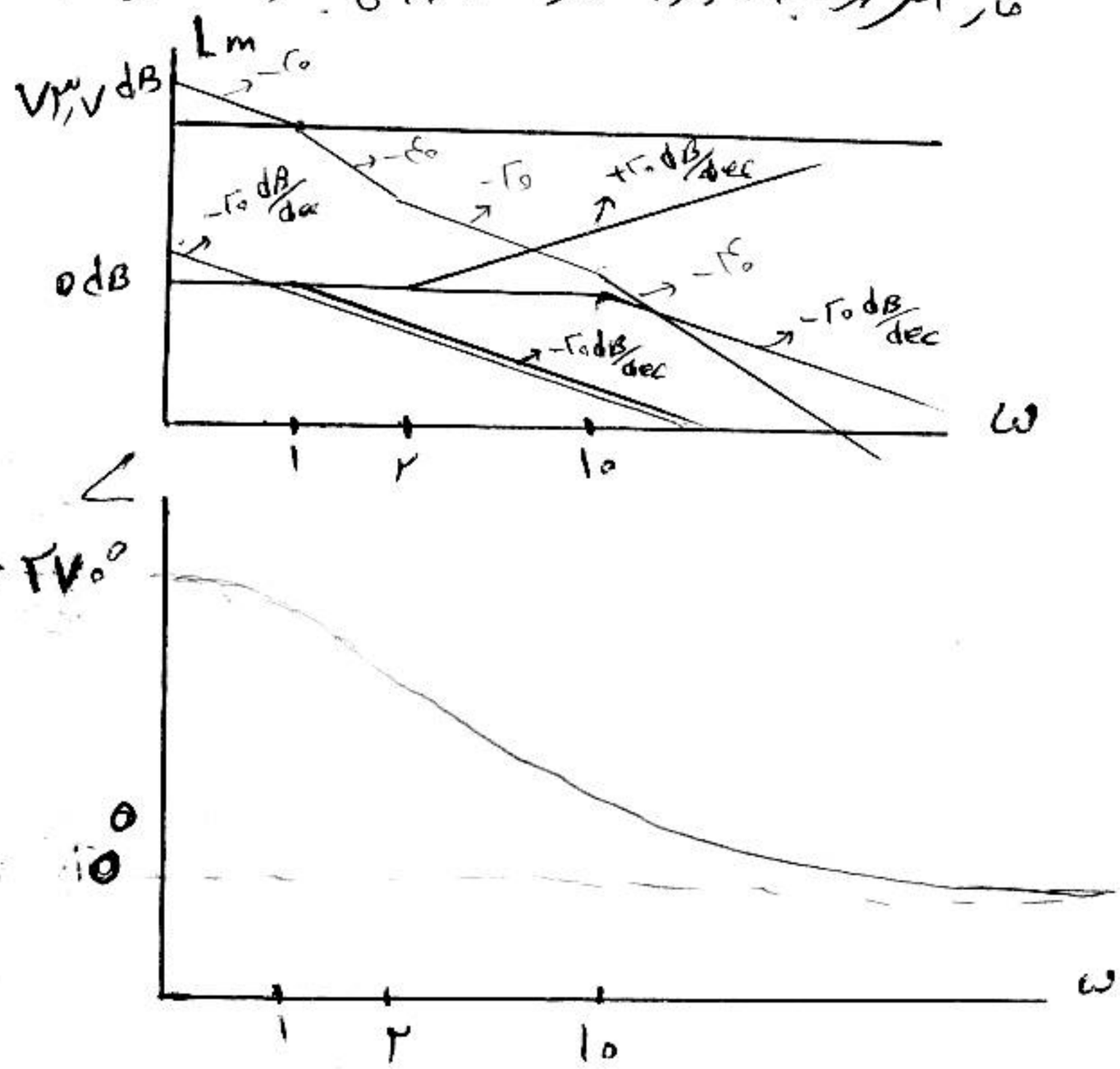
$$\angle(۱+۰/۵j\omega)=\tan^{-۱}(-۰/۵\omega)$$

در نتیجه: $\omega\to۰^+$; $\tan^{-۱}(-۰/۵\omega)\to ۳۶۰^\circ$ یعنی در فرکانسهای پایین عبارت $(۱-j\omega T)$ مانند

$$\begin{cases}\tan^{-۱}\infty=۹۰^\circ\\ \tan^{-۱}-\infty=۲۷۰^\circ\end{cases}$$

فاز صفر نرفته، دارای فاز ۳۶۰° می‌باشد. در فرکانسهای بالا خازنی می‌شود: به صورت مقابل

	Lm	ω_c	∠
۴۰	$۲۰\log ۴۰$	—	۰
$۱-j\omega/۲$	$\omega\to۰$ ۰dB $\omega\to\infty$ $۲۰\frac{dB}{dec}$	۲	$\omega\to۰$ ۳۶۰° $\omega\to\infty$ ۲۷۰°
$(۱+j\omega)^{-۱}$	$\omega\to۰$ ۰ $\omega\to\infty$ $-۲۰\frac{dB}{dec}$	۱	$\omega\to۰$ ۰ $\omega\to\infty$ -۹۰
$(۱+\frac{j\omega}{۱۰})^{-۱}$	$\omega\to۰$ ۰ $\omega\to\infty$ $-۲۰\frac{dB}{dec}$	۱۰	$\omega\to۰$ ۰ $\omega\to\infty$ -۹۰°
$(j\omega)^{-۱}$	$-۲۰\frac{dB}{dec}$	—	-۹۰°



۵-۳) باتوجه به نمودار دامنه، در فرکانسهای پایین شیب منحنی $-20\ dB/dec$ بوده و فاز -90° است. لذا تابع تبدیل باید یک قطب در مبدأ داشته باشد. $\frac{1}{j\omega}$

در فرکانسهای بالا (از فرکانس ۴ به بعد)، شیب منحنی $-40\ dB/dec$ می‌گردد. یک قطب از این فرکانس اضافه می‌گردد. نمودار فاز هم به -180° می‌رسد. به اختلاف تعداد قطب‌ها و صفرهای محدود ۲ می‌باشد. باتوجه به نمودار، تابع تبدیل هیچ صفری ندارد زیرا در اینصورت در فرکانس صفر، شیب نمودار دامنه افزایش پیدا می‌کرد. یا فاز مثبت ایجاد می‌شد. بنابراین شکل کلی تابع تبدیل بصورت زیر می‌باشد:

$$G(s)=\frac{4k}{s(s+4)} \quad \text{یا} \quad G(j\omega)=\frac{k}{j\omega(1+j\omega/4)}$$

برای تعیین مقدار k، یک نقطه از نمودار دامنه $|G(j\omega)|$ قرائت می‌کنیم. بهترین نقطه $0\ dB$ است. باتوجه به منحنی، در فرکانس ۴، کمترین دامنه $0\ dB$ می‌باشد. یعنی اندازه $G(j\omega)$ برابر با یک است.

$$|G(j\omega)|=\frac{k}{\omega\sqrt{1+\frac{\omega^2}{16}}} \rightarrow |G(j4)|=\frac{k}{4\sqrt{1+\frac{16}{16}}}=1 \rightarrow k=10,816$$

۵-۹)

الف-

$$G(s)=\frac{k(1+s)^2}{s^3} \rightarrow G(j\omega)=\frac{k(1+j\omega)^2}{(j\omega)^3}=-\frac{2k}{\omega^2}+j\frac{k(1-\omega^2)}{\omega^3}$$

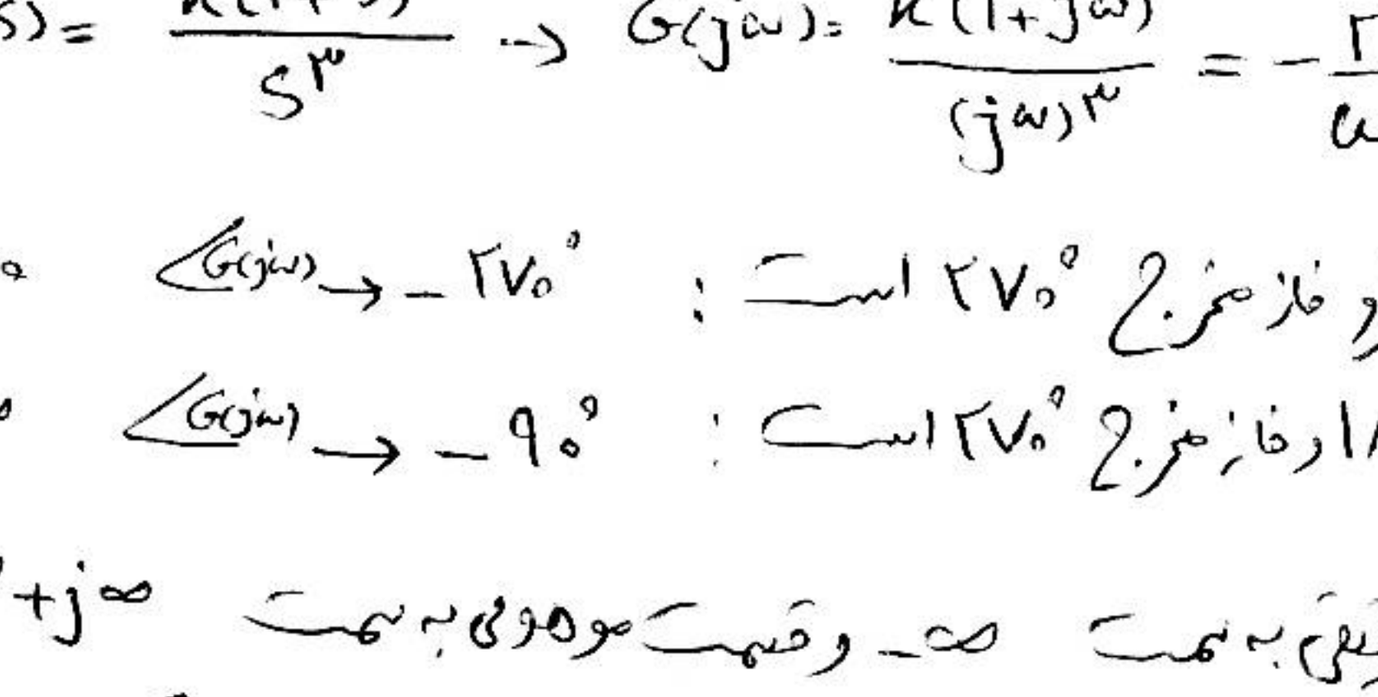
در $\omega\to 0$، فاز صورت صفر و فاز مخرج 270° است: $\omega\to 0 \quad \angle G(j\omega)\to -270^\circ$

در $\omega\to\infty$، فاز صورت 180° و فاز مخرج 270° است: $\omega\to\infty \quad \angle G(j\omega)\to -90^\circ$

در فرکانس $\omega\to 0$، قسمت حقیقی به سمت $-\infty$ و قسمت موهومی به سمت $+j\infty$ می‌رود.

محل تلاقی با محور حقیقی: $1-\omega^2=0 \rightarrow \omega=\pm 1 \rightarrow G(j1)=-2k$

محل تلاقی با محور موهومی: ندارد.



(۹-۵

$$G(s)=\frac{k}{s^2(1-0.5s)}$$

ب) ج)

نکته: برای تعیین فاز عبارتهای به صورت $(1\pm j\omega T)$ از بردارها کمک گیریم.

$$1+j\omega T = T(j\omega+\frac{1}{T}) = T(j\omega-(-\frac{1}{T}))$$

در نتیجه بردار از $-\frac{1}{T}$ به $j\omega$ رسم و زاویه آن را نسبت به محور مثبت بسنجید.

$$1+j\omega T = -T(j\omega-\frac{1}{T})$$

در نتیجه بردار از $\frac{1}{T}$ به $j\omega$ رسم و زاویه آن را نسبت به محور مثبت اندازه گیریم. به علت وجود ضریب $-T$، باید به زاویه اندازه گیری شده، 180° اضافه کنیم.

* * *

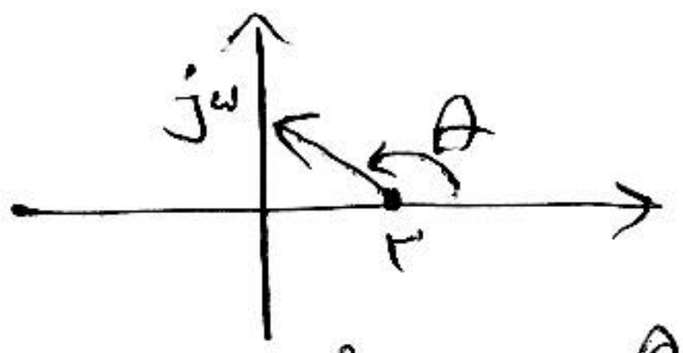
$$G(j\omega)=\frac{k}{(j\omega)^2(1-0.5j\omega)} = \frac{k(1+0.5j\omega)}{-\omega^2(1+0.25\omega^2)} = \frac{k}{-\omega^2(1+0.25\omega^2)}+j\frac{0.5k\omega}{\omega(1+0.25\omega^2)}$$

بازای $\omega\to 0$: قسمت حقیقی و موهومی به سمت $\infty-$ می روند.

با توجه به اسلوپ $\frac{1}{j\omega}$، عبارت $\frac{1}{(j\omega)^2}$ فاز -90° ایجاد می کند.

برای محاسبه فاز $(1-0.5j\omega)$ از نکته بالا کمک گیریم:

$$(1-0.5j\omega) = -\frac{1}{2}(j\omega-2)$$



بازای $\omega\to 0$: θ به سمت 180° میرود $\Leftarrow \angle 1-0.5j\omega = 180+180=360^\circ$

بازای $\omega\to\infty$: θ به سمت 90° میرود $\Leftarrow \angle 1-0.5j\omega = 90+180=270^\circ$

بنابراین در $\omega\to 0$ فاز صورت صفر، فاز کسری $180^\circ+$ و فاز $(1-0.5j\omega)$، 360° می باشد.

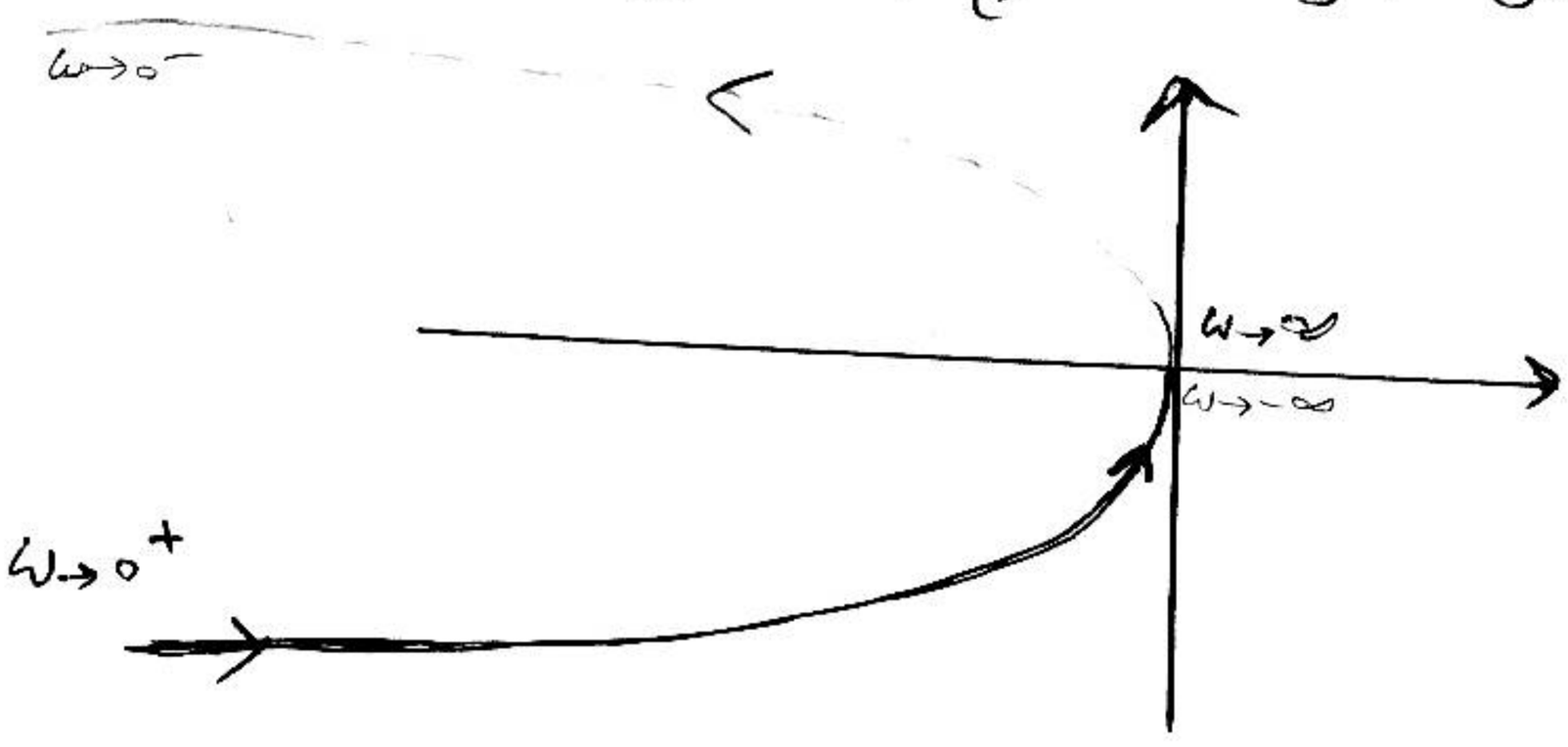
در نتیجه: $\angle G(j\omega)\big/_{\omega\to 0} = -180^\circ$

و در $\omega\to\infty$: فاز صورت صفر، فاز کسری 180° و فاز $(1-0.5j\omega)$، 270° می باشد.

در نتیجه: $\angle G(j\omega)\big/_{\omega\to\infty} = -90$

با توجه به قسمت حقیقی و موهومی $G(j\omega)$، (هیچ) برش حقیقی، نمودار با صورت‌های تلاقی ندارد،

بازای $\omega \to 0^-$ قسمت حقیقی و موهومی هر دو به سمت ∞ می‌روند.



ب)

$$G(s) = \frac{k}{s^2(-1+0.5s)(1+s)} \rightarrow G(j\omega) = \frac{+k}{(j\omega)^2(0.5j\omega-1)(j\omega+1)}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{k/0.5}{(j\omega)^2(j\omega-1/0.5)(j\omega+1)} = \frac{k/0.5\,(-j\omega-1/0.5)(1-j\omega)}{-\omega^2(\omega^2+1/0.25)(\omega^2+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{0.5}\left[\frac{\omega^2+1/0.5}{\omega^2(\omega^2+1/0.25)(\omega^2+1)} + j\frac{4}{0.5}\frac{1}{\omega(\omega^2+1/0.25)(\omega^2+1)}\right]$$

$\omega \to 0$: هر دو قسمت حقیقی و موهومی به سمت $+\infty$ می‌روند.

$$\angle G(j\omega) = -(180 + 180) = -360^\circ \quad ; \omega \to 0$$

$$\angle G(j\omega) = -(180 + 90 + 90) = -360^\circ \quad ; \omega \to \infty$$